*Автоматика и телемеханика, № 9, 2024*

*Нелинейные системы*

**© 2024 г. А.С. КУЛЕШОВ, канд. физ.-мат. наук (alexander.kuleshov@math.msu.ru), М.М. ГАДЖИЕВ, (maxuta-jr@yandex.ru) (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)**

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ ТЕЛА, ОГРАНИЧЕННОГО ПОВЕРХНОСТЬЮ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ, В ПОТОКЕ ЧАСТИЦ[1]

Изучаются регулярные прецессии твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения и находящегося в свободном молекулярном потоке частиц. Получены условия устойчивости регулярных прецессий, построены бифуркационные диаграммы Пуанкаре–Четаева.

*Ключевые слова*: твердое тело с неподвижной точкой, свободный молекулярный поток, регулярные прецессии, устойчивость стационарных движений.

**DOI:** 10.31857/S0005231024090035, **EDN:** ZQWMZL

## 1. Введение

Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием внешних сил является обобщением классической задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Один из случаев интегрируемости этой задачи был открыт Ж.-Л. Лагранжем [1]. В дальнейшем было опубликовано множество работ, посвященных изучению динамики волчка Лагранжа. Регулярные прецессии были впервые рассмотрены в [2, 3], а их устойчивость исследуется в работах [2, 4, 5].

Модель взаимодействия свободномолекулярного потока частиц с твердым телом была предложена в работах А.А. Карымова [6, 7] и В.В. Белецкого [8, 9], в которых рассматривалась динамика спутников, движущихся в верхних слоях атмосферы или под действием солнечной радиации. Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием набегающего свободномолекулярного потока частиц впервые была рассмотрена в работе А.А. Бурова и А.В. Карапетяна [10]. В ней получены уравнения движения, а также найден интегрируемый случай, аналогичный случаю Лагранжа в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Вопрос устойчивости стационарных движений тела под воздействием солнечной радиации был рассмотрен, например, в работе В.В. Сидоренко [11].

[1] Исследование выполнено за счет проекта Российского научного фонда № 24-11-20009.

В данной работе исследуются регулярные прецессии динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения. С помощью теории Рауса исследования устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами получены условия устойчивости регулярных прецессий тела с неподвижной точкой, находящегося в потоке частиц.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой $O$ в свободном молекулярном потоке частиц постоянной плотности $\rho$ (см. рис. 1). Частицы потока движутся с постоянной абсолютной скоростью

$$-\boldsymbol{v} = v_0 \boldsymbol{\gamma},$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, неподвижный в абсолютном пространстве и направленный вдоль набегающего потока. Частицы движутся поступательно, тепловым движением пренебрегаем. В качестве модели взаимодействия частиц с телом выбрана следующая – частица совершает абсолютно неупругий удар с телом, передавая ему всю энергию и не отражаясь. Также будем рассматривать достаточно медленные вращения тела, т.е. произведение характерной угловой скорости на характерное расстояние от неподвижной точки до поверхности тела значительно меньше скорости набегающего потока $v_0$. Используя метод, предложенный в работах В.В. Белецкого [8, 9], можно записать систему уравнений движения тела [10, 19–21]:

$$\begin{gathered} \mathbb{J}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J}_0 \boldsymbol{\omega}] = -\rho v_0^2 S(\boldsymbol{\gamma}) [\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\gamma})], \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathbb{J}_0 = \mathrm{diag}\,(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции тела относительно неподвижной точки $O$, записанный в системе координат $Oxyz$, связанной с телом, с началом в неподвижной точке и осями, направленными вдоль главных осей инерции тела. Обозначим орты этой системы координат $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$. Запишем вектор абсолютной угловой скорости тела в тех же координатах $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{e}_x + \omega_2 \boldsymbol{e}_y + \omega_3 \boldsymbol{e}_z$.

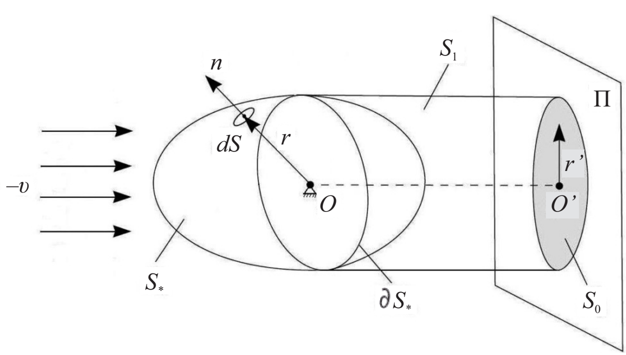


Рис. 1. Твердое тело с неподвижной точкой в потоке частиц.

Выражение $S(\boldsymbol{\gamma})$ представляет собой площадь фигуры $S_0$ – ортогональной проекции поверхности тела на плоскость П, перпендикулярную направлению набегающего потока частиц $\boldsymbol{\gamma}$. Можно сказать, что $S_0$ представляет собой "тень", которую отбрасывает тело в потоке частиц на плоскость, перпендикулярную потоку. Вектор $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{\gamma})$ – это вектор, проведенный из проекции неподвижной точки $O'$ (см. рис. 1) в центроид "тени", т.е. в центр масс однородной пластины, имеющей форму фигуры $S_0$.

### 3. Регулярные прецессии тела

Рассмотрим динамически симметричное тело ($A_1 = A_2$) с неподвижной точкой, лежащей на оси динамической симметрии. Предположим, что тело ограничено поверхностью эллипсоида вращения с полуосями $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = b$, ось симметрии которого совпадает с осью динамической симметрии тела. В таком случае уравнения движения тела (1) допускают один квадратичный и два линейных по обобщенным скоростям первых интеграла [19–22]:

$$U_0 = \frac{A_1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \frac{A_3}{2}\omega_3^2 - f\int\limits_0^{\gamma_3} S(\gamma_3)\, c_3(\gamma_3)\, d\gamma_3 = k_0 = \mathrm{const}, \tag{2}$$

$$U_1 = A_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + A_3\omega_3\gamma_3 = k_1 = \mathrm{const}, \tag{3}$$

$$U_2 = \omega_3 = k_2 = \mathrm{const}, \tag{4}$$

где $f = \rho v_0^2$. В этом случае для изучения стационарных движений системы можно воспользоваться теорией Рауса для голономных систем с известными первыми интегралами [12–15, 18]. Эффективный потенциал в случае, когда тело ограничено поверхностью вытянутого эллипсоида вращения, в явном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} W(\theta) = {} & \frac{(k_1 - A_3 k_2\cos\theta)^2}{2A_1\sin^2\theta} - \frac{f\pi a^2 bl}{2}\cos\theta\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}} - \\ & - \frac{f\pi bl}{2\sqrt{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}\cos\theta}{\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta}{a^2} + \dfrac{\cos^2\theta}{b^2}}}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $l$ – расстояние от неподвижной точки до центра эллипсоида вращения, ограничивающего твердое тело, а $\theta$ – угол между осью динамической симметрии тела и направлением потока частиц, отсчитываемый так, что при $\theta = 0$ тело ориентировано по потоку частиц. При любых значениях постоянных первых интегралов система уравнений (1) допускает двухпараметрическое семейство частных решений следующего вида:

$$\begin{gathered} \omega_1 = \omega\gamma_1, \quad \omega_2 = \omega\gamma_2, \quad \omega_3 = \omega\cos\theta + \Omega, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2 = \sin^2\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\omega$ и $\Omega$ – постоянные, связанные с постоянными $k_1$ и $k_2$ первых интегралов (3) и (4) соотношениями

$$\omega = \frac{k_1 - A_3 k_2 \cos\theta}{A_1 \sin^2\theta}, \quad \Omega = \frac{\left(A_1 \sin^2\theta + A_3 \cos^2\theta\right) k_2 - k_1 \cos\theta}{A_1 \sin^2\theta},$$

а постоянный угол $\theta$ определяется из условия существования регулярных прецессий

$$\frac{dW(\theta)}{d\theta} = 0,$$

которое в явном виде записывается следующим образом:

$$\frac{(k_1 - A_3 k_2 \cos\theta)(A_3 k_2 - k_1 \cos\theta)}{2A_1 \sin^3\theta} + f\pi a^2 bl \sin\theta \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}} = 0. \tag{7}$$

Запишем уравнение (7) в безразмерной форме. Для этого введем безразмерные постоянные интегралов

$$p_1 = \frac{k_1}{\sqrt{A_3 f\pi a^2 l}}, \quad p_2 = k_2 \sqrt{\frac{A_3}{f\pi a^2 l}} \tag{8}$$

и безразмерные параметры

$$y = \frac{A_1}{A_3} \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right), \quad z = \frac{b^2}{a^2} > 1.$$

Тогда условие существования регулярных прецессий (7) в безразмерной форме переписывается следующим образом:

$$\frac{(p_1 - p_2 \cos\theta)(p_2 - p_1 \cos\theta)}{y \sin^3\theta} + \sin\theta \sqrt{z \sin^2\theta + \cos^2\theta} = 0,$$

или, домножая на $-y \sin^3\theta$,

$$a_{11} p_1^2 + 2a_{12} p_1 p_2 + a_{22} p_2^2 + a_1 = 0, \tag{9}$$

$$a_{11} = \cos\theta, \quad a_{12} = -\frac{1 + \cos^2\theta}{2}, \quad a_{22} = \cos\theta,$$

$$a_1 = -y \sin^4\theta \sqrt{z \sin^2\theta + \cos^2\theta}.$$

Легко видеть, что при каждом фиксированном значении $\theta$ уравнение (9) задает некоторую кривую второго порядка. Приведем эту кривую к каноническому виду. Для этого введем новые переменные $x_1$ и $y_1$ по формулам:

$$x_1 = p_1 - p_2, \qquad y_1 = p_1 + p_2. \tag{10}$$

Для того, чтобы понять физический смысл безразмерных постоянных интегралов $x_1$ и $y_1$, вспомним определение постоянных $k_1$ и $k_2$ (см. формулы (3), (4)). Для динамически симметричного тела можно записать

$$k_1 = A_1 (\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + A_3\omega_3\gamma_3 = (\mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{\gamma}), \quad k_2 = \omega_3 = \frac{(\mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{e}_z)}{A_3}.$$

Подставляя данные выражения в (8), получим следующее:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f\pi a^2 l}}(\mathbb{J}_0\boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{\gamma}), \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f\pi a^2 l}}(\mathbb{J}_0\boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{e}_z).$$

По формуле (10) получается, что $x_1$ – это, с точностью до постоянного множителя, проекция кинетического момента тела на вектор $\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{e}_z$:

$$x_1 = p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f\pi a^2 l}}(\mathbb{J}_0\boldsymbol{\omega},\, (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{e}_z)).$$

А $y_1$ – проекция кинетического момента тела на вектор $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{e}_z$

$$y_1 = p_1 + p_2 = \frac{1}{\sqrt{A_3 f\pi a^2 l}}(\mathbb{J}_0\boldsymbol{\omega},\, (\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{e}_z)).$$

Векторы $\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{e}_z$ перпендикулярны друг другу

$$((\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{e}_z), (\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{e}_z)) = \boldsymbol{\gamma}^2 - \boldsymbol{e}_z^2 = 0.$$

Третий ортогональный вектор перпендикулярен $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{e}_z$, следовательно, проходит вдоль линии узлов

$$[(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{e}_z) \times (\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{e}_z)] = 2\,[\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{e}_z]\,.$$

Таким образом, $\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{e}_z$ – ортогональные векторы в плоскости, перпендикулярной линии узлов, а $x_1$ и $y_1$, с точностью до постоянного множителя, представляют собой проекции кинетического момента на эти векторы.

Запишем уравнение (9) в координатах $x_1$, $y_1$

$$\frac{1}{4}(1 + \cos\theta)^2 x_1^2 - \frac{1}{4}(1 - \cos\theta)^2 y_1^2 + a_1 = 0. \tag{11}$$

Полученное уравнение с точностью до постоянного множителя представляет собой канонический вид кривой второго порядка. Определим вид этой кривой. При $\theta \neq \pi n$ свободный член $a_1 < 0$, а коэффициенты в квадратичной части отличны от нуля. Это означает (см., например, [16, 17]), что в каждом сечении плоскостями $\theta \neq \pi n$ поверхности, задаваемой уравнением (11), имеем гиперболу. При $\theta = \pi n$ свободный член, а также один из коэффициентов в квадратичной части будут равны нулю. Таким образом, в сечении плоскостями $\theta = \pi n$ поверхность (11) представляет собой одну прямую вида

$$p_1 = (-1)^n\, p_2.$$

Эти прямые соответствуют однопараметрическим решениям системы уравнений движения, которые отвечают перманентным вращениям тела вокруг оси динамической симметрии, совпадающей с направлением потока частиц, омывающего тело с неподвижной точкой (см. [22]).

Условие устойчивости стационарных движений (6) в случае, когда тело с неподвижной точкой, находящееся в потоке частиц, ограничено поверхностью вытянутого эллипсоида вращения, имеет вид

$$\frac{d^2W\left(\theta\right)}{d\theta^2} \geqslant 0$$

или, в явном виде

$$\frac{\left(1+2\cos^2\theta\right)}{y\sin^4\theta}p_1^2 - \frac{\left(5+\cos^2\theta\right)\cos\theta}{y\sin^4\theta}p_1p_2 + \frac{\left(1+2\cos^2\theta\right)}{y\sin^4\theta}p_2^2 + \\ + \frac{\left(2z\sin^2\theta+2\cos^2\theta-1\right)\cos\theta}{\sqrt{z\sin^2\theta+\cos^2\theta}} \geqslant 0.$$

После домножения на положительный множитель $y\sin^4\theta$, данное неравенство примет вид

$$b_{11}p_1^2 + 2b_{12}p_1p_2 + b_{22}p_2^2 + b_1 \geqslant 0, \tag{12}$$

$$b_{11} = 1+2\cos^2\theta, \quad b_{12} = -\frac{\left(5+\cos^2\theta\right)\cos\theta}{2}, \quad b_{22} = 1+2\cos^2\theta,$$

$$b_1 = \frac{y\left(2z\sin^2\theta+2\cos^2\theta-1\right)\sin^4\theta\cos\theta}{\sqrt{z\sin^2\theta+\cos^2\theta}}.$$

Запишем неравенство (12) в переменных $x_1$, $y_1$:

$$\frac{1}{4}\left(1+\cos\theta\right)^2\left(2+\cos\theta\right)x_1^2 + \frac{1}{4}\left(1-\cos\theta\right)^2\left(2-\cos\theta\right)y_1^2 + b_1 \geqslant 0. \tag{13}$$

При каждом фиксированном $\theta$ границей области устойчивости (т.е. кривой, которой соответствует знак равенства в неравенстве (13)) также будет некоторая кривая второго порядка. Вид этой кривой зависит от знака свободного члена $b_1$. При $b_1 < 0$ граница области устойчивости представляет собой эллипс с центром в точке $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. На плоскости безразмерных параметров $x_1$, $y_1$ при каждом фиксированном $\theta$ вне соответствующего эллипса будет область устойчивости регулярных прецессий (6), а внутри – область неустойчивости. При $b_1 > 0$ граница области устойчивости вырождается в мнимый эллипс, а при $b_1 = 0$ граница представляет из себя прямую. Можно заметить, что при $b_1 \geqslant 0$ неравенство (13) выполняется для любых значений $x_1, y_1$, следовательно регулярные прецессии будут устойчивыми.

Рассматривая одновременно условие существования (11) и условие устойчивости (13) стационарных движений тела с неподвижной точкой в потоке

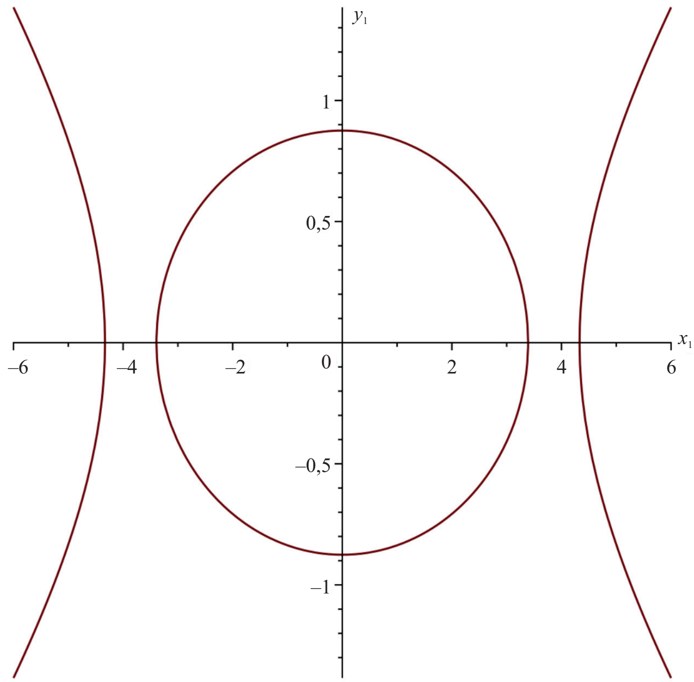


Рис. 2. Вид гиперболы и эллипса при $y = \frac{5}{6}$, $z = 8$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

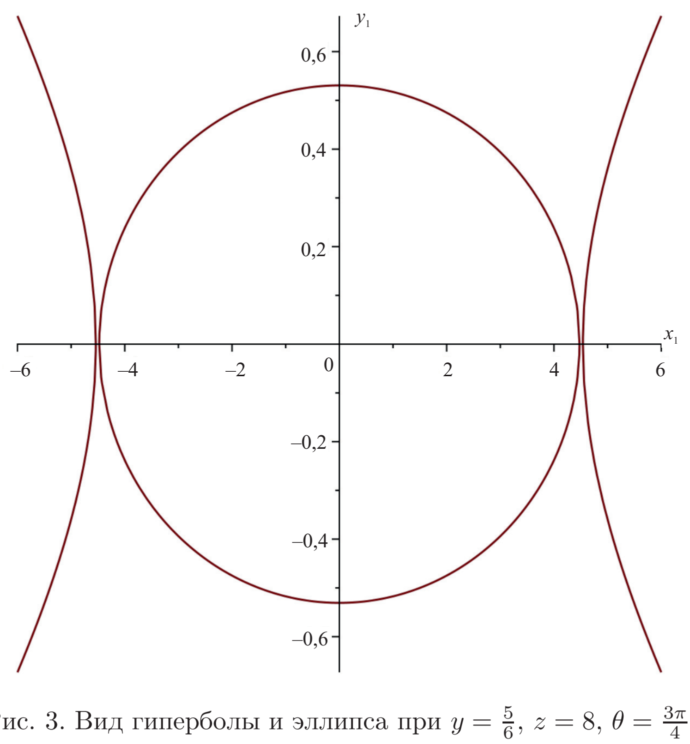


Рис. 3. Вид гиперболы и эллипса при $y = \frac{5}{6}$, $z = 8$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

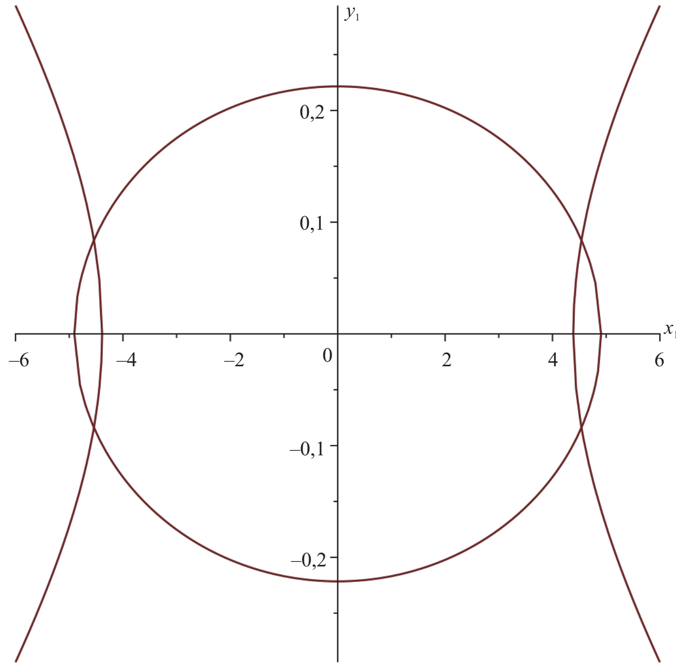


Рис. 4. Вид гиперболы и эллипса при $y = \frac{5}{6}$, $z = 8$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

частиц, можно сделать вывод об устойчивости таких движений. Именно, если при некотором фиксированном $\theta$ гипербола (11) и эллипс (13) не пересекаются, то стационарное движение (6), соответствующее данному $\theta$, является устойчивым (рис. 2–4).

Исследуем вопрос устойчивости регулярных прецессий более подробно. Из условия существования (11) стационарных движений выразим величину $y_1^2$:

$$y_1^2 = \frac{(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2} x_1^2 + \frac{4a_1}{(1-\cos\theta)^2}. \tag{14}$$

Так как $y_1^2 \geqslant 0$, то из (14) получим ограничение на $x_1$:

$$x_1^2 \geqslant \frac{4y\sin^4\theta}{(1+\cos\theta)^2}\sqrt{z\sin^2\theta + \cos^2\theta} = (x_1)_*^2. \tag{15}$$

Подставим полученное выражение (14) для $y_1^2$ в условие устойчивости (13). Получим неравенство

$$(1+\cos\theta)^2 x_1^2 + (2-\cos\theta)\, a_1 + b_1 \geqslant 0. \tag{16}$$

Левая часть неравенства представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Обозначим через $x_{10}$ абсциссу точки пересечения параболы с положительной полуосью $Ox_1$. Найдем это значение

$$x_{10}^2 = -\frac{(2-\cos\theta)\, a_1 + b_1}{(1+\cos\theta)^2}.$$

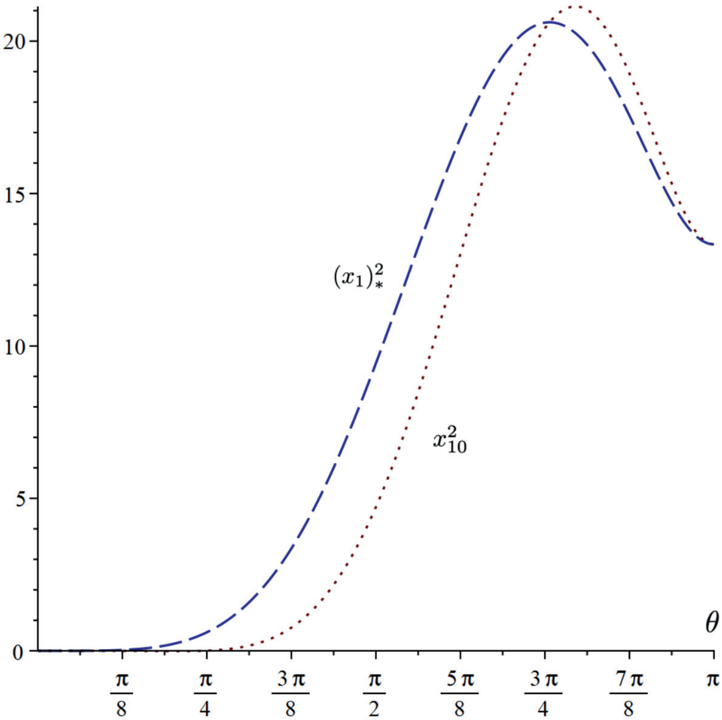


Рис. 5. Взаимное расположение $x^2_{10}$ и $(x_1)^2_*$ при $y = \frac{5}{6}, z = 8$.

После подстановки значений $a_1$ и $b_1$ запишем выражение $x^2_{10}$ в явном виде:

$$x^2_{10} = \frac{y\sin^4\theta\sqrt{z\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{(1+\cos\theta)^2}\left(2-3\cos\theta+\frac{\cos\theta}{z\sin^2\theta+\cos^2\theta}\right). \tag{17}$$

При $x_1^2 \geqslant x^2_{10}$ условие устойчивости (16) будет выполняться. Таким образом, регулярные прецессии существуют при выполнении условия (15), и являются устойчивыми, если выполняется условие (16). Отсюда можно сделать следующие выводы (рис. 5):

1. При $x^2_{10} < (x_1)^2_*$ регулярные прецессии устойчивы при любых допустимых значениях $x_1$, $y_1$ (а соответственно при любых $p_1$, $p_2$).

2. При $x^2_{10} > (x_1)^2_*$ регулярные прецессии устойчивы только при $x_1^2 > x^2_{10}$.

### *3.1. Случай $z > 1$*

Рассмотрим сначала случай вытянутого эллипсоида вращения ($z > 1$). Найдем условия, при которых $x^2_{10} > (x_1)^2_*$. Получим

$$3\,(1-z)\cos^3\theta + 2\,(1-z)\cos^2\theta + (3z-1)\cos\theta + 2z < 0.$$

Раскладывая на множители левую часть, получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned}(18)\qquad & 3\,(z-1)\,(\cos\theta+1)\left(\cos\theta-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}\right)\times\\ &\times\left(\cos\theta-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}\right)>0.\end{aligned}$$

Первые три множителя в левой части неравенства (18) положительные. Можно показать, что при $z>1$ верно неравенство

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}>1.$$

Таким образом, множитель

$$\cos\theta-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}$$

в неравенстве (18) всегда отрицателен. Следовательно, неравенство (18) равносильно неравенству

$$\cos\theta-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}<0. \tag{19}$$

Рассмотрим данное неравенство. Функция

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}$$

монотонно возрастает при $z>1$. При этом она принимает значение $-1$ при $z=2$, и дальше асимптотически стремится к значению $-\frac{2}{3}$. Таким образом, при $1<z\leqslant 2$ получаем

$$\cos\theta-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}\geqslant 0,$$

а значит, неравенство (19) не выполняется. Отсюда делаем вывод, что при $1<z\leqslant 2$ регулярные прецессии устойчивы при любом значении $\theta$ и любых допустимых значениях параметров $x_1$ и $y_1$ (и соответственно при любых допустимых значениях постоянных интегралов $p_1$, $p_2$).

На рис. 6 при $y=2$, $z=\frac{12}{11}$ представлена бифуркационная диаграмма Пуанкаре–Четаева на уровне $y_1=0$. На этом графике прямая $\theta=\pi$ соответствует перманентным вращениям тела вокруг оси динамической симметрии. Видно, как от этой прямой ответвляются устойчивые регулярные прецессии тела. Кроме того, на плоскости безразмерных параметров $x_1$ и $y_1$ при фиксированных значениях $\theta$ были построены графики соответствующих гиперболы

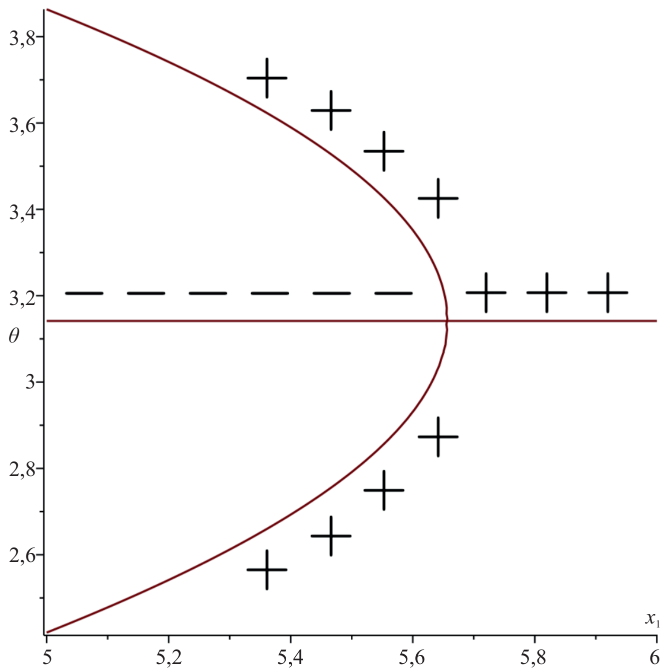


Рис. 6. Сечение поверхности (11) плоскостью $y_1 = 0$ при $y = 2, z = \frac{12}{11}$.

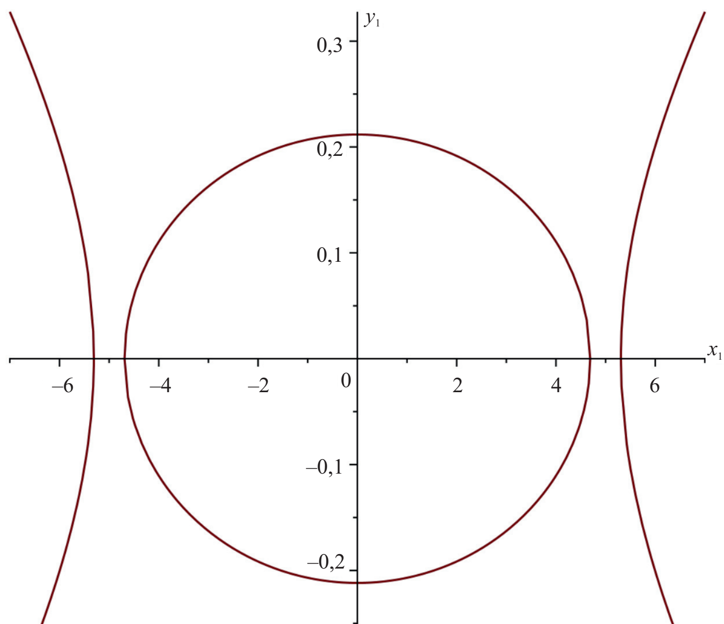


Рис. 7. Взаимное расположение гиперболы и эллипса при $y = 2, z = \frac{12}{11}, \theta = \frac{5\pi}{6}$.

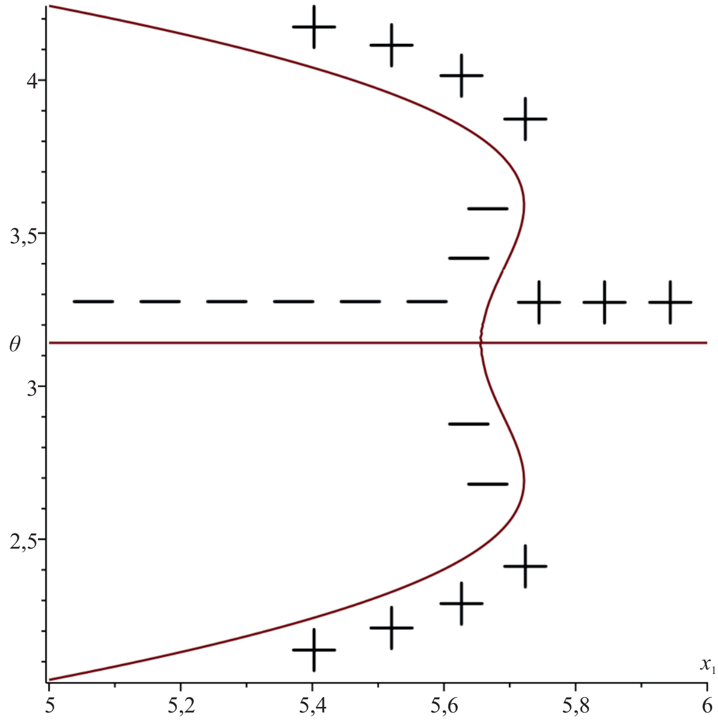


Рис. 8. Сечение поверхности (11) плоскостью $y_1 = 0$ при $y = 2, z = \frac{5}{2}$.

и эллипса, задаваемых соотношениями (11) и (13) (см. рис. 7). Видно, что в рассматриваемом случае они не пересекаются.

Введем новое обозначение $\theta_2$:

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}\right). \tag{20}$$

Можно сделать вывод, что при $z > 2$ неравенство (19) выполняется при $\cos\theta < \cos\theta_2$ и не выполняется при $\cos\theta \geqslant \cos\theta_2$.

На рис. 8 при $y = 2$, $z = \frac{5}{2}$ представлена бифуркационная диаграмма Пуанкаре–Четаева на уровне $y_1 = 0$. Видно, что регулярные прецессии тела, ответвляющиеся от перманентных вращений, являются неустойчивыми вблизи значения $\theta = \pi$, а затем, проходя через точку перегиба, становятся устойчивыми. Точка перегиба соответствует значению $\theta = \theta_2$, где $\theta_2$ определяется формулой (20).

Кроме того, на рис. 9 на плоскости безразмерных параметров $x_1$ и $y_1$ представлены графики гиперболы и эллипса при значении $\theta = \theta_2$, определяемом формулой (20). Видно, что при этом значении они касаются, но не пересекаются.

Объединяя полученные выводы, можно заключить: исходное неравенство (18) выполняется при $z > 2$ и $\cos\theta < \cos\theta_2$. И не выполняется при

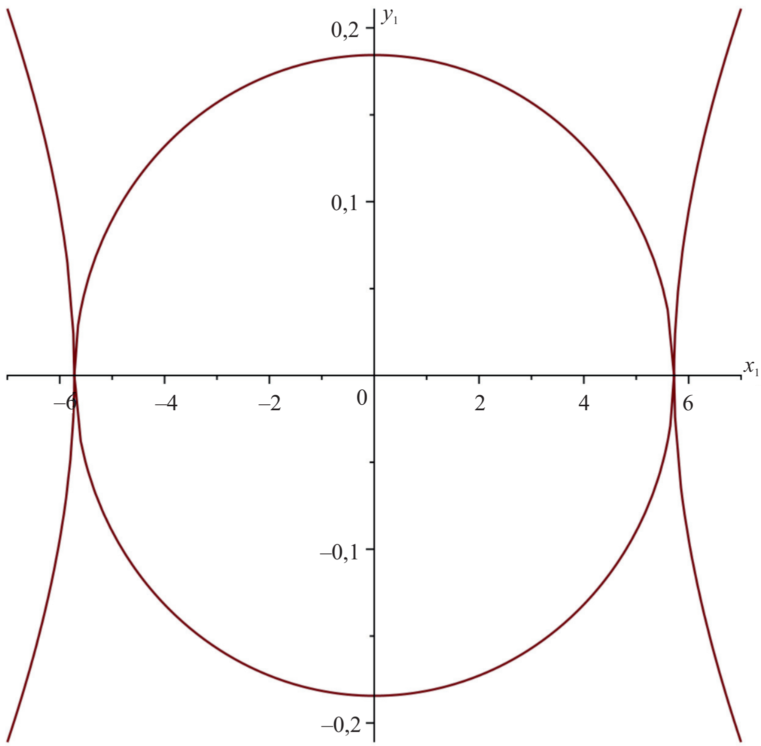


Рис. 9. Взаимное расположение гиперболы и эллипса при $y = 2, z = \frac{5}{2}, \theta = \theta_2$

всех других значениях переменных. Таким образом, регулярные прецессии устойчивы при любых значениях $x_1$, $y_1$ (а соответственно и при любых значениях постоянных первых интегралов $p_1$, $p_2$), если $1 < z \leqslant 2$ или $z > 2$ и $\cos\theta > \cos\theta_2$. Если же $z > 2$ и $\cos\theta < \cos\theta_2$, то регулярные прецессии устойчивы только при $x_1^2 > x_{10}^2$.

### *3.2. Случай $z < 1$*

Теперь исследуем устойчивость регулярных прецессий сжатого эллипсоида вращения ($z < 1$). Все найденные ранее выражения для $x_{10}^2$ и $(x_1)_*^2$ будут иметь тот же вид и для сжатого эллипсоида (15), (17). Условия, при которых $x_{10}^2 > (x_1)_*^2$, будут аналогичны (18). Упростив их, получим следующее неравенство:

$$\left(\cos\theta - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right)\left(\cos\theta - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right) < 0. \tag{21}$$

Легко видеть, что при $z \in \left[\frac{1}{25}, 1\right)$ неравенство (21) не выполняется. Таким образом, можем сделать вывод, что при $z \in \left[\frac{1}{25}, 1\right)$ значение $x_{10}^2 \leqslant (x_1)_*^2$, а значит регулярные прецессии будут устойчивыми при любых значениях параметров $x_1$, $y_1$.

### 3.3. *Случай* $z < \frac{1}{25}$

Рассмотрим наконец случай $z < \frac{1}{25}$. Неравенство (21) будет выполняться при следующих значениях $\theta$:

$$\theta \in \left( \arccos\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right), \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right)\right). \tag{22}$$

Введем новое обозначение $\theta_1$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right).$$

Получается, что при $\theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, \pi)$ неравенство (21) не будет выполняться, следовательно, регулярные прецессии будут устойчивыми при любых значениях параметров $x_1$, $y_1$. В случае же, если $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, то регулярные прецессии будут устойчивы только при $x_1^2 > x_{10}^2$.

На рис. 10 при $y = \frac{101}{200}$, $z = \frac{1}{100}$ представлена бифуркационная диаграмма Пуанкаре–Четаева на уровне $y_1 = 0$. Видно, что регулярные прецессии тела, ответвляющиеся от перманентных вращений, являются устойчивыми вблизи значения $\theta = \pi$, и устойчивость сохраняется при уменьшении угла до $\theta_2$.

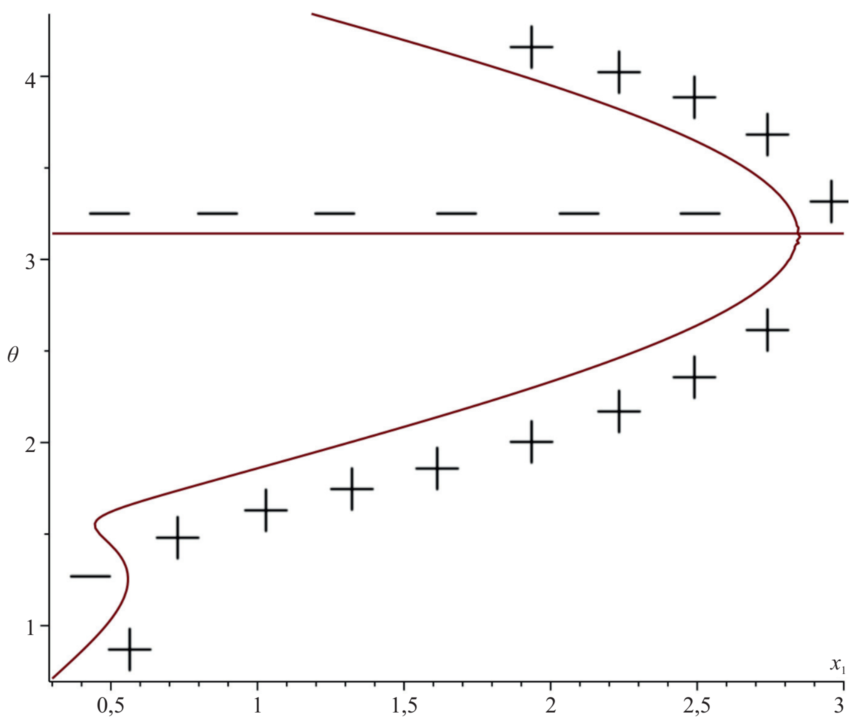


Рис. 10. Сечение поверхности (11) плоскостью $y_1 = 0$ при $y = \frac{101}{200}, z = \frac{1}{100}$.

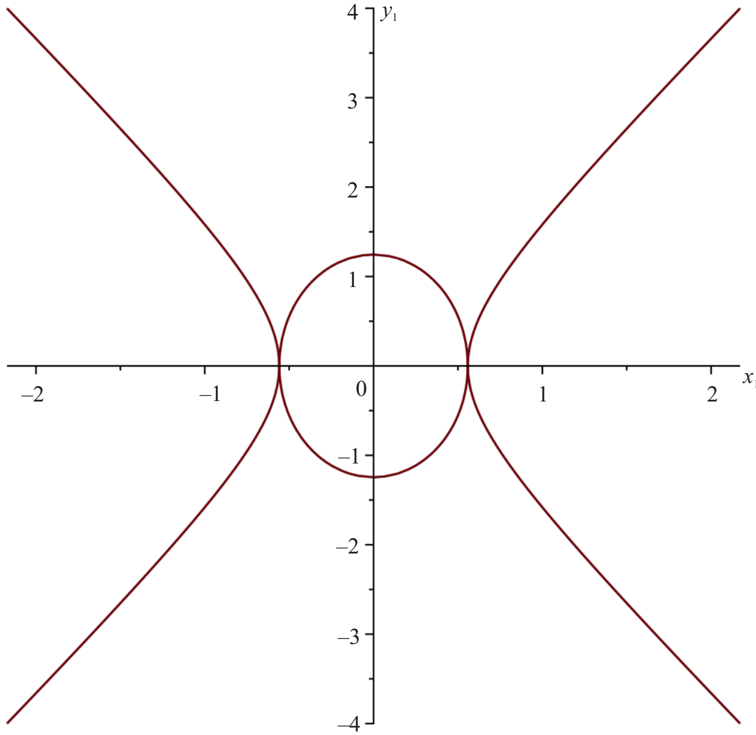


Рис. 11. Вид гиперболы и эллипса при $y = \frac{101}{200}$, $z = \frac{1}{100}$, $\theta = \arccos\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right)$.

Далее, при значениях $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, регулярные прецессии становятся неустойчивыми, и при $\theta < \theta_1$ снова становятся устойчивыми.

На рис. 11–12 на плоскости безразмерных параметров $x_1$ и $y_1$ представлены графики гиперболы и эллипса при значениях

$$z = \frac{1}{100}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right) \text{ и } \quad \theta = \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right).$$

Видно, что при этих значениях угла $\theta$ гиперболы и эллипс касаются, но не пересекаются.

Итак, окончательно можно сделать вывод, что все регулярные прецессии (6) динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, находящегося в потоке частиц, будут устойчивы независимо от величин параметров $x_1$, $y_1$ (а соответственно и независимо от значений постоянных первых интегралов $p_1$ и $p_2$), если отношение квадратов полуосей эллипсоида лежит в промежутке

$$\frac{1}{25} \leqslant z \leqslant 2.$$

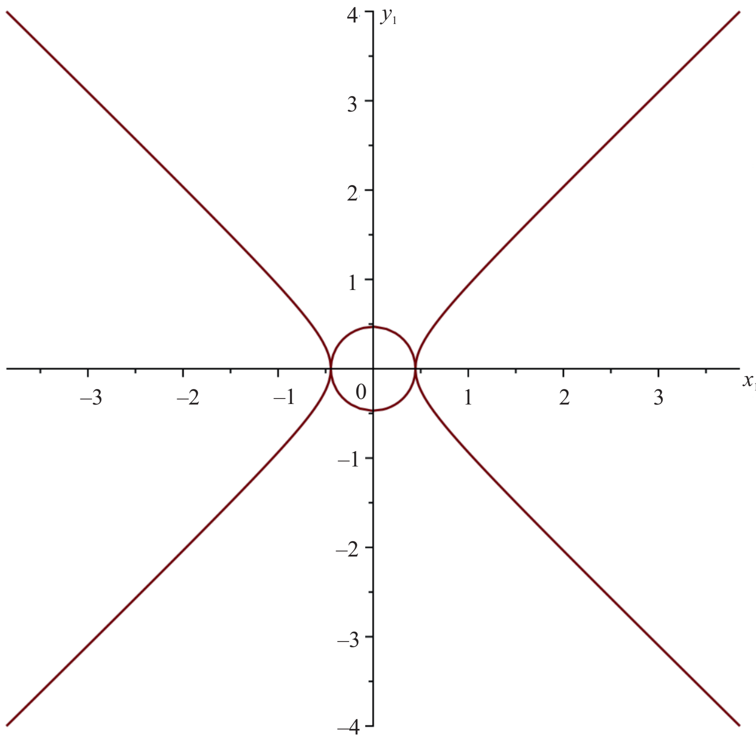


Рис. 12. Вид гиперболы и эллипса при $y = \frac{101}{200}$, $z = \frac{1}{100}$, $\theta = \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right)$.

При $z > 2$ регулярные прецессии тела будут устойчивы независимо от значений параметров $x_1$ и $y_1$ если $\theta$ лежит в промежутке

$$\theta \in \left[0,\, \arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}\right)\right).$$

При значениях $\theta$, принадлежащих промежутку

$$\theta \in \left[\arccos\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{25z-1}{z-1}}\right), \pi\right)$$

регулярные прецессии устойчивы, если справедливо неравенство

$$x_1^2 > \frac{y \sin^4\theta \sqrt{z\sin^2\theta + \cos^2\theta}}{(1+\cos\theta)^2}\left(2 - 3\cos\theta + \frac{\cos\theta}{z\sin^2\theta + \cos^2\theta}\right).$$

При

$$0 < z < \frac{1}{25}$$

регулярные прецессии тела будут устойчивы независимо от значений параметров $x_1$ и $y_1$, если $\theta$ принадлежит объединению интервалов

$$\theta \in \left(0,\, \arccos\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right)\right) \bigcup \left(\arccos\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right),\, \pi\right).$$

При значениях $\theta$, принадлежащих отрезку

$$\theta \in \left[\arccos\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right), \arccos\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-25z}{1-z}}\right)\right]$$

регулярные прецессии будут устойчивы, если выполняется условие

$$x_1^2 > \frac{y \sin^4\theta \sqrt{z\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{(1+\cos\theta)^2}\left(2-3\cos\theta+\frac{\cos\theta}{z\sin^2\theta+\cos^2\theta}\right).$$

Таковы основные выводы об устойчивости регулярных прецессий динамически симметричного тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, в потоке частиц.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Lagrange J.L.* Mechanique analitique. Paris: Desaint, 1788.
2. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: Being part II of a treatise on the whole subject. 6th ed. New York: Dover, 1955.
3. *Tournaire L.-M.* Memoire sur la rotation des corps pesant // C. R. Acad. Sci. Paris. 1860. V. 50. No. 1. P. 476–481.
4. *Скимель В.Н.* К задачам устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 130–132.
5. *Четаев Н.Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 1. С. 123–124.
6. *Карымов А.А.* Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 867–876.
7. *Карымов А.А.* Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника в поле сил светового давления // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 923–930.
8. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
9. *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка, 1984.
10. *Буров А.А., Карапетян А.В.* О движении твердого тела в потоке частиц // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 77–81.

11. *Сидоренко В.В.* О вращательном движении космического аппарата с солнечным стабилизатором // Косм. иссл. 1992. Т. 30. № 6. С. 780–790.

12. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал URSS, 1998.

13. *Карапетян А.В.* Устойчивость и бифуркация движений. М.: Изд-во МГУ, 2020.

14. *Каленова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А.* Неголономные механические системы и стабилизация движения // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 117–158.

15. *Karapetyan A.V.* On construction of the effective potential in singular cases // Regular Chaot. Dynam. 2000. V. 5. No. 2. P. 219–224.

16. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.

17. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Изд-во ГИТТЛ, 1955.

18. *Karapetyan A.V., Kuleshov A.S.* Steady Motions of Nonholonomic Systems // Regular and Chaot. Dynam. 2002. V. 7. No. 1. P. 81–117.

19. *Гаджиев М.М., Кулешов А.С.* О движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вест. МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2022. № 3. С. 58–68.

20. *Кулешов А.С., Гаджиев М.М.* Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вест. СПб. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 550–560.

21. *Gadzhiev M.M., Kuleshov A.S.* Nonintegrability of the Problem of the Motion of an Ellipsoidal Body with a Fixed Point in a Flow of Particles // Russ. J. Nonlin. Dynam. 2022. V. 18. No. 4. P. 629–637.

22. *Гаджиев М.М., Кулешов А.С.* Об устойчивости стационарных движений тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Тр. МАИ. 2023. № 129. С. 1–20.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.*

Поступила в редакцию 03.06.2024

После доработки 05.07.2024

Принята к публикации 11.08.2024